VII. Apáczai Matematika Kupa 7. osztály 2011.
Pontozási útmutató

1. feladat:

Egy szöcske ugrál a számegyenesen. Ugrásainak hossza 2 egység. A számegyenesen a 10-et jelölő pontból a 14-et jelölő pontba 4 ugrással jutott el. Hányféleképpen tehette ezt meg? Sorold fel a lehetőségeket! **8 p**

Megoldás:
A szöcske a számegyenes 10-et jelölő pontjából indult. A 14-et jelölő pont tőle 2 ugrásnyira jobbra található. **1 p**
4 ugrással úgy tudott ebbe a pontba ugrani, ha a jobbra ugrásainak száma 2-vel nagyobb volt a balra ugrásainak számánál. **1 p**
Tehát a 4 ugrása közül 3-mal jobbra, 1-gyel balra ugrott. **1 p**
Balra vagy az 1. , vagy a 2. , vagy a 3. , vagy a 4. ugrás során ugorhatott. **2 p**
Tehát 4- féleképpen tehette meg. **1 p**
Tehát a lehetőségek:

A táblázat számai a számegyenesen elfoglalt helyet jelöli.

10	8	10	12	14
10	12	10	12	14
10	12	14	12	14
10	12	14	16	14

2 p

2. feladat:
Egy iskolában a fiúk és a lányok számának aránya 11:10. A fiúk átlagéletkora 13, a lányoké 12 év. Menyi az egész iskola átlagéletkora? **8 p**

Megoldás:
Legyen a fiúk és a lányok létszáma $11x$ és $10x$. **1 p**
A fiúk életkorának összege $11x \cdot 13 = 143x$ év. **2 p**
A lányok életkorának összege $10x \cdot 12 = 120x$ év. **2 p**
Így az iskola tanulóinak átlagéletkora:
$\frac{143x+120x}{11x+10x} = \frac{263x}{21x} \approx 12,52$ év **3 p**

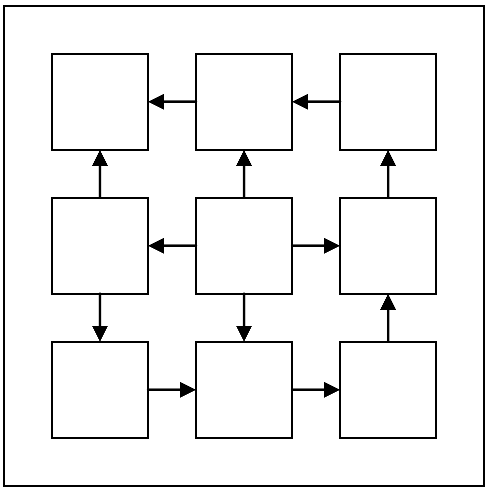
3. feladat:
Egy háromszög leghosszabb oldala 30 cm hosszú. A másik két oldal közül az egyik négyszer olyan hosszú, mint a másik.
Mekkorák lehetnek a háromszög oldalai, ha azok cm-ben mérve egész számok?
8 p
Megoldás:
A háromszög hiányzó oldalai x cm és 4x cm, ahol x egész szám. **1 p**
Teljesülnie kell a háromszög egyenlőtlenségeknek:
$5x > 30$, azaz $x > 6$, **1 p**
$x + 30 > 4x$, azaz $x < 10$, **1 p**
$4x + 30 > x$ teljesül. **1 p**
Így x lehet 7, 8, 9 **1 p**

Mivel a leghosszabb oldal 30, ezért a 8, 32, 30 és a 9, 36, 30 oldalhosszak nem adnak megoldást centiméterben mérve. **2 p**
Az oldalak tehát cm-ben mérve 7, 28, 30 lehetnek. **1 p**

Megjegyzés: A 4x nem lehet a leghosszabb oldal, tehát 4x<30. Ebből következik, hogy x<7, 5cm. Ez az összefüggés azonnal adja, hogy az x =7 cm.
Ezt a gondolatmenetet is teljes pontszámmal értékeljük.

4. feladat:
Írj az ábrabeli négyzetekbe különböző törteket úgy, hogy a következő feltételek mindegyike teljesüljön!
a) A törtek számlálója és nevezője az {1, 2, 3, 4, 5} halmaz eleme.
b) Minden tört egynél kisebb. .
c) A törtek tovább nem egyszerűsíthetők.
d) Az ábrán látható nyilak mindig a nagyobb tört felől a kisebb tört felé mutatnak. **8 p**

.
.



Megoldás:
Az első három feltételnek eleget tevő törtek:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

2 p

Ezek csökkenő sorrendben:

$$\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$ **1 p**

A berajzolt nyilak alapján látható, hogy a legnagyobb tört (a $\frac{4}{5}$) a középső négyzetbe kerül. **1 p**
Ezt követő szám a 2. sor első négyzetébe kerül. Innen a csökkenő sorrendben felírt számokat kell már csak beírni a nyilak által jelzett sorrendben. **1 p**
A négyzetek helyes kitöltésért (a nyilak figyelembe vételével) **3 p**

Megjegyzés: Magyarázat nélküli helyes kitöltés esetén maximálisan 3 pont adható.

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$

5. feladat:
Az egyik általános iskola 7. osztálya nagyobb kerékpártúrára indult. Egy idő múlva az osztály megtett útja úgy aránylik a hátralevő úthoz, mint 2:3. Ezután az osztály tagjai további 6 km-es utat tettek meg, s ekkor az összes megtett út úgy aránylik a hátralevő úthoz, mint 6:5. Mekkora utat tett meg az osztály a túrán, amíg a kiindulási pontjától elért a túra végpontjáig?
9 p

Megoldás:

S_1 S_2

2x 3x **1 p**

2x+6 3x-6 **1 p**

$$\frac{2x+6}{3x-6}=\frac{6}{5}$$ **2 p**

10x+30=18x-36 **1 p**

66=8x

8,25=x **1 p**

2x=16,5 km 3x=24,75 km összesen 41,25 km **2 p**

Tehát a kerékpártúra 41,25 km hosszú. **1 p**

6. feladat:

Egy gazda a farmján (tanyáján) 51 állatot tart: lovakat és kacsákat. Ha annyi lova lenne, mint ahány kacsája van most, és annyi kacsája lenne, mint ahány lova van most, akkor az állatok lábának száma 20 %-kal kevesebb lenne. Hány ló, illetve kacsa van a farmon? **9 p**

Megoldás:
A farmon **k** kacsa és **51-k** ló van. **1 p**
A lábak száma eredetileg **2k + 4(51-k),** **1 p**
a csere után **4k + 2(51-k)** **1 p**
A feladat szövege szerint **0,8 [2k +4(51-k)] = [4k + 2(51-k)]** **2 p**
A műveletek elvégzése és rendezés után **3,6 k = 61,2** **1 p**
Innen **k = 17** **1 p**

Tehát a farmon 17 kacsa és 34 ló él, **1 p**
Ellenőrzés a szövegben. **1 p**

Megjegyzés: Egyenletrendszerrel történő helyes megoldás esetén is jár a 9 pont, amit értelemszerűen bontsunk.

VII. Apáczai Matematika Kupa 8. osztály 2011.
Pontozási útmutató

1. feladat:
Egy öttagú család átlagéletkora most 20 év. Az apa 38 éves, az anya 36 éves. A gyerekek közül az idősebbek ikrek.
a) Hány évesek az ikrek, ha a legfiatalabb gyerek most 4 éves?
b) Mennyi lesz a család átlagéletkora 5 év múlva?
c) Mennyi volt a család átlagéletkora 5 évvel ezelőtt? **7 p**

Megoldás:
Jelöljük az ikrek életkorát x-szel. Az átlag ekkor $\frac{4+x+x+38+36}{5}=20$ alakban írható fel.
1 p

$$4+2\cdot x+74=100$$ **1 p**
$$2\cdot x=22$$
$$x=11$$
Tehát az ikrek 11 évesek. **1 p**

Öt év múlva az átlagéletkor 25 év lesz. Mindenki 5 évvel idősebb lesz. **2 p**
Öt évvel ezelőtt a legkisebb gyerek még nem élt. Tehát az átlagéletkor.
$$\frac{6+6+33+31}{4}=19$$ **2 p**

2. feladat:
Két versenyző egy versenyen kérdésekre válaszol. Az első nyolc kérdésre, a második hat kérdésre adott helyes választ. A díj, amit pénzben kapnak, arányos a feleletekre adott helyes válaszok számával. Mekkora összeget kapnak külön-külön, ha a második díjának $\frac{1}{6}$ része, és az első díjának 25 %-a együttvéve 11000 Ft-tal kisebb, mint a kapott díjak összege?
8 p

Megoldás:
A két versenyző által nyert összeget egy egységnek véve, akkor az első 8 részt, a második 6 részt kapott az egységből. **1 p**
Ketten együtt 14 részt. Egy rész $\frac{1}{14}$-e az egységnek. **1 p**
Az egységből kivonjuk a 25 %-át, azaz az első helyezett díjának $\frac{1}{4}$-ét, vagyis 2 részt
1 p
és a második helyezett díjának $\frac{1}{6}$-át, vagyis 1 részt, tehát összesen 3 részt, **1 p**
akkor a megmaradt részek, vagyis 11 rész 11000 Ft-ot jelent. **1 p**
Tehát 1 rész 1000 Ft. **1 p**
Az első versenyző 8000 Ft-ot, a második versenyző 6000 Ft-ot kapott. **2 p**

3. feladat :
Melyik az a négyjegyű szám, amely teljes négyzet (egy egész szám négyzete), és az első két számjegy azonos, továbbá az utolsó két számjegy is azonos?
8 p

Megoldás:

A feltevés szerint $n^2 = 1000a + 100a + 10b + b$ **1 p**

$n^2 = 11(100a + b)$ ahol **a** és **b** számjegyek. **1 p**

Így n osztható 11-gyel. **1 p**

Másrészt mivel n négyjegyű, $33 \leq n \leq 99$, **2 p**

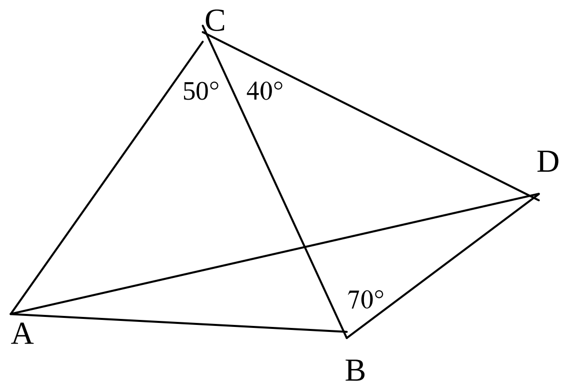
ezért csak a 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 értékek jöhetnek szóba n-re. **1 p**

Ezek közül az $n = 88$ megfelelő, mert $n^2 = 7744$. **2 p**

4. feladat:

Az ábrán egy ABCD négyszög látható. Az AB alapú ABC háromszög egyenlő szárú. Határozd meg az ABD háromszög szögeinek nagyságát a szögek mérése nélkül, ha ismertek az ábrán megadott szögek!

9 p



Megoldás:

Mivel AC=BC, ezért $CAB\angle = CBA\angle = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$ **1 p**

A BCD háromszögben a D csúcsnál levő szög = $180^\circ - \left(40^\circ + 70^\circ\right) = 70^\circ$ **1 p**

Tehát a BDC háromszög egyenlő szárú . **1 p**

AC=BC és BC=DC miatt AC=DC. **1 p**

Tehát az ADC háromszög is egyenlő szárú, ezért a **1 p**

$CAD\angle = CDA\angle = 45^\circ, \quad BAD\angle = BAC\angle - DAC\angle = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ$ **2 p**

$BDA\angle = BDC\angle - ADC\angle = 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ$ **1 p**

Tehát az ABD háromszög szögei: 20°, 135°, 25°. **1 p**

5. feladat:

András hétfőtől péntekig minden nap vett a piacon néhány szem barackot. Az öt nap alatt összesen 46 szemet vett, és minden nap többet vett, mint az előző nap. Még azt is tudjuk, hogy pénteken kétszer annyit vásárolt, mint hétfőn. Hány szem barackot vett csütörtökön?

9 p

Megoldás:

A hétfői szám nem lehet 5, vagy annál kevesebb, mert akkor a pénteki 10 vagy annál kevesebb lenne, a többi pedig 10-nél is kevesebb, így az öt szám összege kisebb lenne 46-nál. **1 p**

Ha a hétfőn vett barackok száma 7 lenne, akkor a pénteki 14, a közbülsők legalább 8, 9, 10. ezek összege viszont már nagyobb 46-nál. Tehát a hétfői szám 7-nél kisebb. Így hétfőre csak egy szám jöhet szóba, a 6. **1 p**

Ha a hétfői szám 6, akkor a pénteki 12, akkor a másik három összege 46-6-12=28. **1 p**

Ezt kell a 7, 8, 9, 10, 11 számokból három összegeként előállítani. Ha a három szám között nem szerepelne a 11, akkor a legnagyobb összeg 8+9+10=27 lenne csak. Tehát a 11-nek szerepelnie kell, és nyílván ez lesz a közbülső számok közül a legnagyobb. **2 p**

Így csütörtökön csak 11 barackot vehetett. **1 p**

Még azt is meg kell néznünk van-e megoldás keddre és szerdára. Két lehetőség is van 7 és 10, valamint a 8 és 9. **2 p**

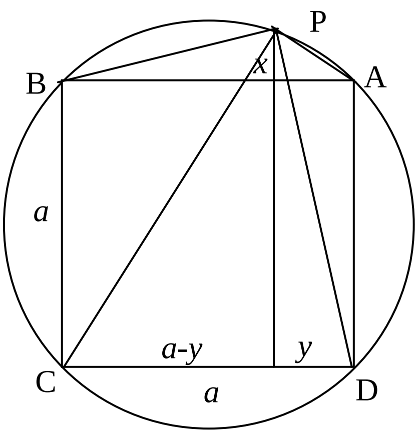
Tehát nem tudjuk egyértelműen megmondani minden napra, hogy melyik nap hány barackot vett, de a csütörtökit meg tudtuk határozni. **1 p**

6. feladat:

Az ABCD négyzet köré írt kör rövidebb AB ívének egy pontja P. Mutassuk meg, hogy a PCD háromszög területe egyenlő a PAB, PBC, PAD háromszögek területének összegével! Igaz-e az állítás téglalapra is?

9 p

Megoldás:



$$T_{PDC\Delta} = \frac{a(a+x)}{2}.$$ **1 p**

$$T_{PAB\Delta} = \frac{ax}{2}.$$ **1 p**

$$T_{PBC\Delta} = \frac{a(a-y)}{2}.$$ **1 p**

$$T_{PAD\Delta} = \frac{ay}{2}.$$ **1 p**

Az utóbbi hármat összeadva az elsőt kapjuk. **1 p**

Téglalapra a gondolatmenetet alkalmazva, ha oldalai b= $\overline{BC}$ és a= $\overline{AB}$:

$$T_{PDC\Delta} = \frac{a\left(b+x\right)}{2}$$ **1 p**

$$T_{PAB\Delta} = \frac{ax}{2} \quad T_{PBC\Delta} = \frac{b\left(a-y\right)}{2} \quad T_{PAD\Delta} = \frac{by}{2}$$

Az utóbbi három egyenletet összeadva megkapjuk keresett háromszög területét. **3 p**

Megjegyzés: Nem használtuk fel, hogy P a kör pontja. Bármely olyan P pontra igaz lenne az állítás, amely AD és BC egyenesek közötti sávban az AB szakasz „fölött” van.

Ha a versenyző ezt a megállapítást közli, akkor jutalom pontot érdemel (2 pontot).